,

,

12.3. Плоскость. Основные задачи

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из этих углов (см. рис. 72). Поэтому $\cos\varphi = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$ или

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Если плоскости Q_1 и Q_2 перпендикулярны (см. рис. 73, *а*), то таковы же их нормали, т. е. $\bar{n}_1 \perp \bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда $\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$,

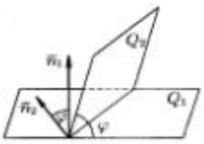

Рис. 72

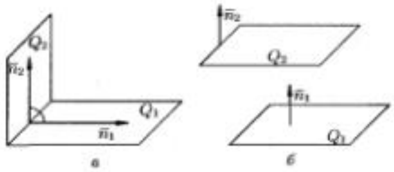

Рис. 73

т. е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Полученное равенство есть *условие перпендикулярности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны (см. рис. 73, *б*), то будут параллельны и их нормали $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ (и наоборот). Но тогда, как известно, координаты векторов пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Это и есть *условие параллельности двух плоскостей* Q_1 и Q_2.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.}$$

Вывод этой формулы такой же, как вывод формулы расстояния от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ (см. с. 73).

Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1; z_1)$ — произвольная точка плоскости Q, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B; C)$ (см. рис. 74). Следовательно,

$$d = |\text{пр}_{\bar{n}}\, \overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

А так как точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ принадлежит плоскости Q, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad \text{т. е.} \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

Поэтому $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Отметим, что если плоскость Q задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости Q может быть найдено по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|.$$

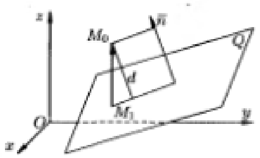

Рис. 74

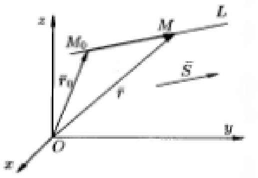

Рис. 75

12.4. Уравнения прямой в пространстве

Векторное уравнение прямой

Положение прямой в пространстве вполне определено, если задать какую-либо точку M_0 на прямой и вектор $\bar{S}$, параллельный этой прямой. Вектор $\bar{S}$ называется ***направляющим вектором прямой***. Пусть прямая L задана ее точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$. Возьмем на прямой L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0$, $\bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}. \qquad (12.10)$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий на прямой L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t — скалярный множитель, называемый *параметром*, может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой (см. рис. 75).

Уравнение (12.10) можно записать в виде

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}.} \qquad (12.11)$$

Полученное уравнение называется ***векторным уравнением прямой***.

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение (12.11) можно записать в виде

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = (x_0 + tm)\bar{i} + (y_0 + tn)\bar{j} + (z_0 + tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases}} \qquad (12.12)$$

Они называются ***параметрическими уравнениями прямой*** в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Пусть $\bar{S} = (m; n; p)$ — направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на этой прямой. Вектор $\overline{M_0M}$, соединяющий точку M_0 с произвольной точкой $M(x; y; z)$ прямой L, параллелен вектору $\bar{S}$. Поэтому координаты вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ и вектора $\bar{S} = (m; n; p)$ пропорциональны:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.} \qquad (12.13)$$

Уравнения (12.13) называются ***каноническими уравнениями прямой*** в пространстве.

Замечания: 1) Уравнения (12.13) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (12.12), исключив параметр t. Из уравнений (12.12) находим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t.$$

2) Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (12.13) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2; -4; 1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z = 1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z - 1 = 0$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. В качестве направляющего вектора $\bar{S}$ можно взять вектор $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$, т. е. $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ (см. рис. 76). Следовательно, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, то, согласно уравнениям (12.13), уравнения прямой L имеют вид

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.} \qquad (12.14)$$

Активация Win

Уравнения (12.14) называются ***уравнениями прямой, проходящей через две данные точки.***

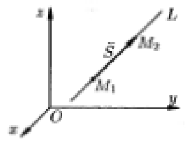

Рис. 76

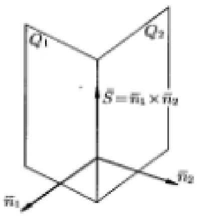

Рис. 77

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{12.15}$$

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны (координаты векторов $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны), то система (12.15) определяет прямую L как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (см. рис. 77). Уравнения (12.15) называют *общими уравнениями прямой.*

От общих уравнений (12.15) можно перейти к каноническим уравнениям (12.13). Координаты точки M_0 на прямой L получаем из системы уравнений (12.15), придав одной из координат произвольное значение (например, $z = 0$).

Так как прямая L перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой L можно принять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Замечание: Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения (12.14).

Пример 12.1. Написать канонические уравнения прямой L, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение: Положим $z = 0$ и решим систему $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$ Находим точку $M_1(-2; 1; 0) \in L$. Положим $y = 0$ и решим систему $\begin{cases} x - z = -1, \\ 2x - 3z = -5. \end{cases}$ Находим вторую точку $M_2(2; 0; 3)$ прямой L. Записываем уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

12.5. Прямая линия в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

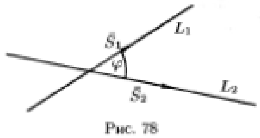

Рис. 78

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $S_2 = (m_2; n_2; p_2)$ (см. рис. 78). Поэтому, по известной формуле для косинуса угла между векторами, получаем $\cos\varphi = \dfrac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2}{|\bar{S}_1| \cdot |\bar{S}_2|}$ или

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.} \tag{12.16}$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (12.16) следует взять по модулю.

Если *прямые L_1 и L_2 перпендикулярны,* то в этом и только в этом случае имеем $\cos\varphi = 0$. Следовательно, числитель дроби (12.16) равен нулю, т. е. $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Активация Win

Если *прямые* L_1 *и* L_2 *параллельны*, то параллельны их направляющие векторы $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны, т. е. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Пример 12.2. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - z - 1 = 0, \\ 2x - y + 3x + 5 = 0. \end{cases}$$

❍ Решение: Очевидно, $\bar{S}_1 = (2; -1; 3)$, а $\bar{S}_2 = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, где $\bar{n}_1 = (2; 1; -1)$, $\bar{n}_2 = (2; -1; 3)$. Отсюда следует, что $\bar{S}_2 = (2; -8; -4)$. Так как $\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_2 = 4 + 8 - 12 = 0$, то $\varphi = 90°$. ●

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

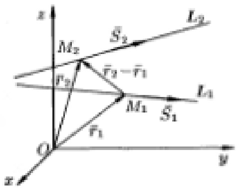

Рис. 79

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

и

$$\frac{x - x_1}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Их направляющие векторы соответственно $\bar{S}_1 = (m_1; n_1; p_1)$ и $\bar{S}_2 = (m_2; n_2; p_2)$ (см. рис. 79).

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_2$. Тогда

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ и $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения: $(\bar{r}_2 - \bar{r}_1)\bar{S}_1\bar{S}_2 = 0$, т. е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.}$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\bar{S}_2 \neq \lambda\bar{S}_1$, либо параллельны, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$.

12.6. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая L уравнениями $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$.

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ — угол между векторами $\bar{n} = (A; B; C)$ и $\bar{S} = (m; n; p)$ (см. рис. 80). Тогда $\cos\theta = \frac{\bar{n} \cdot \bar{S}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{S}|}$. Найдем синус угла φ, считая $\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$: $\sin\varphi = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$. И так как $\sin\varphi \geqslant 0$, получаем

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \tag{12.17}$$

Если *прямая* L *параллельна плоскости* Q, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны (см. рис. 81), а потому $\bar{S} \cdot \bar{n} = 0$, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

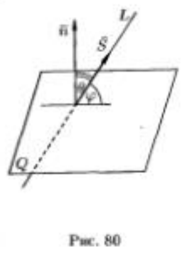

Рис. 80

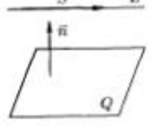

Рис. 81

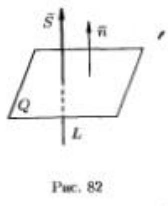

Рис. 82

Если *прямая* L *перпендикулярна плоскости* Q, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны (см. рис. 82). Поэтому равенства

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{12.18}$$

с плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{12.19}$$

Для этого надо решить систему уравнений (12.18) и (12.19). Проще всего это сделать, записав уравнения прямой (12.18) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (12.19), получаем уравнение $A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$ или

$$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0. \tag{12.20}$$

Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am+Bn+Cp\neq 0$, то из равенства (12.20) находим значение t:

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

Рассмотрим теперь случай, когда $Am+Bn+Cp=0$ ($L \parallel Q$):

а) если $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение (12.20) решения не имеет, так как имеет вид $0\cdot t+F=0$, где $F\neq 0$);

б) если $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то уравнение (12.20) имеет вид $t\cdot 0+0=0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости.***

10.2. Уравнения прямой на плоскости

Простейшей из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости Oxy задана произвольная прямая, не параллельная оси Oy. Ее положение вполне определяется ординатой b точки $N(0;b)$ пересечения с осью Oy и углом α между осью Ox и прямой (см. рис. 41).

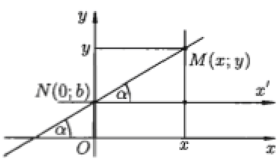

Рис. 41

Под углом α ($0\leqslant\alpha<\pi$) наклона прямой понимается наименьший угол, на который нужно повернуть вокруг точки пересечения прямой и оси Ox против часовой стрелки ось Ox до ее совпадения с прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x;y)$ (см. рис. 41). Проведем через точку N ось Nx', параллельную оси Ox и одинаково с ней направленную. Угол между осью Nx' и прямой равен α. В системе $Nx'y$ точка M имеет координаты x и $y-b$. Из определения тангенса угла следует равенство $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y-b}{x}$, т. е. $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot x+b$. Введем обозначение $\operatorname{tg}\alpha=k$, получаем уравнение

$$\boxed{y=kx+b,} \tag{10.2}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки $M(x;y)$ прямой. Можно убедиться, что координаты любой точки $P(x;y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (10.2) не удовлетворяют.

Число $k=\operatorname{tg}\alpha$ называется ***угловым коэффициентом*** прямой, а уравнение (10.2) — ***уравнением прямой с угловым коэффициентом.***

Если прямая проходит через начало координат, то $b=0$ и, следовательно, уравнение этой прямой будет иметь вид $y=kx$.

Если прямая параллельна оси Ox, то $\alpha = 0$, следовательно, $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$ и уравнение (10.2) примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси Oy, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, уравнение (10.2) теряет смысл, т. к. для нее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не существует. В этом случае уравнение прямой будет иметь вид

$$x = a, \qquad (10.3)$$

где a — абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox. Отметим, что уравнения (10.2) и (10.3) есть уравнения первой степени.

Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде

$$Ax + By + C = 0, \qquad (10.4)$$

где A, B, C — произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Покажем, что уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии. Возможны два случая.

Если $B = 0$, то уравнение (10.4) имеет вид $Ax + C = 0$, причем $A \neq 0$, т. е. $x = -\frac{C}{A}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

Если $B \neq 0$, то из уравнения (10.4) получаем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B}$.

Итак, уравнение (10.4) есть уравнение прямой линии, оно называется *общим уравнением прямой*.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, то уравнение приводится к виду $y = -\frac{C}{B}$. Это есть уравнение прямой, параллельной оси Ox;

2) если $B = 0$, то прямая параллельна оси Oy;

3) если $C = 0$, то получаем $Ax + By = 0$. Уравнению удовлетворяют координаты точки $O(0; 0)$, прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$ и ее направление характеризуется угловым коэффициентом k. Уравнение этой прямой можно записать в виде $y = kx + b$, где b — пока неизвестная величина. Так как прямая проходит через точку $M(x_0; y_0)$, то координаты точки удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$.

Подставляя значение b в уравнение $y = kx + b$, получим искомое уравнение прямой $y = kx + y_0 - kx_0$, т. е.

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0).} \qquad (10.5)$$

Уравнение (10.5) с различными значениями k называют также *уравнениями пучка прямых* с центром в точке $M(x_0; y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy.

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Уравнение прямой, проходящей через точку M_1, имеет вид

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (10.6)$$

где k — пока неизвестный коэффициент.

Так как прямая проходит через точку $M_2(x_2; y_2)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению (10.6): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда находим $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставляя найденное значение k в уравнение (10.6), получим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.} \qquad (10.7)$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$.

Если $x_2 = x_1$, то прямая, проходящая через точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, параллельна оси ординат. Ее уравнение имеет вид $x = x_1$.

Если $y_2 = y_1$, то уравнение прямой может быть записано в виде $y = y_1$, прямая M_1M_2 параллельна оси абсцисс.

Уравнение прямой в отрезках

Пусть прямая пересекает ось Ox в точке $M_1(a; 0)$, а ось Oy — в точке $M_2(0; b)$ (см. рис. 42). В этом случае уравнение (10.7) примет вид

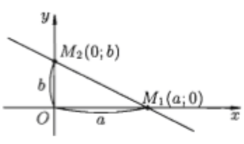

Рис. 42

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}, \quad \text{т. е.} \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно данному ненулевому вектору $\bar{n} = (A; B)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотрим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ (см. рис. 43). Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то есть

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.} \tag{10.8}$$

Уравнение (10.8) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору.*

Вектор $\bar{n} = (A; B)$, перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой.*

Уравнение (10.8) можно переписать в виде

$$Ax + By + C = 0, \tag{10.9}$$

где A и B — координаты нормального вектора, $C = -Ax_0 - By_0$ — свободный член. Уравнение (10.9) есть общее уравнение прямой (см. (10.4)).

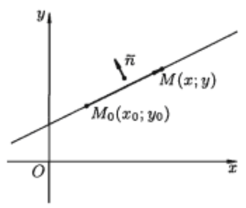

Рис. 43

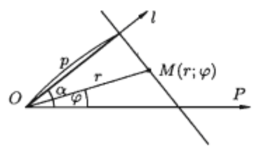

Рис. 44

Полярное уравнение прямой

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Ее положение можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (см. рис. 44).

Для любой точки $M(r; \varphi)$ на данной прямой имеем:

$$\text{пр}_l\, \overline{OM} = p.$$

С другой стороны,

$$\text{пр}_l\, \overline{OM} = |\overline{OM}| \cdot \cos(\alpha - \varphi) = r \cdot \cos(\varphi - \alpha).$$

Следовательно,

$$\boxed{r\cos(\varphi - \alpha) = p.} \tag{10.10}$$

Полученное уравнение (10.10) и есть *уравнение прямой в полярных координатах.*

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется заданием p и α (см. рис. 45). Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy. Введем полярную систему, взяв O за полюс и Ox за полярную ось. Уравнение прямой можно записать в виде

$$r \cdot \cos(\varphi - \alpha) - p = 0, \quad \text{т. е.} \quad r \cdot \cos\varphi\cos\alpha + r\sin\varphi\sin\alpha - p = 0.$$

Но, в силу формул, связывающих прямоугольные и полярные координаты, имеем: $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$. Следовательно, уравнение (10.10) прямой в прямоугольной системе координат примет вид

$$\boxed{x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0.} \tag{10.11}$$

Уравнение (10.11) называется *нормальным уравнением прямой.*

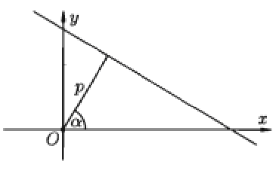

Рис. 45

Покажем, как привести уравнение (10.4) прямой к виду (10.11).

Умножим все члены уравнения (10.4) на некоторый множитель $\lambda \neq 0$. Получим $\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$. Это уравнение должно обратиться в уравнение (10.11). Следовательно, должны выполняться равенства: $\lambda A = \cos\alpha$, $\lambda B = \sin\alpha$, $\lambda C = -p$. Из первых двух равенств находим

$$\lambda^2 A^2 + \lambda^2 B^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Множитель λ называется *нормирующим множителем.* Согласно третьему равенству $\lambda C = -p$ знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 10.2. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

❍ Решение: Находим нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{1}{-\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\dfrac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y - 3 = 0$. ●

10.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Угол между двумя прямыми и условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис. 46).

Требуется найти угол φ, на который надо повернуть в положительном направлении прямую L_1 вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой L_2.

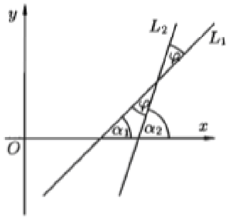

Рис. 46

Решение: Имеем $\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$ (теорема о внешнем угле треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Если $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$, поэтому

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},} \qquad (10.12)$$

откуда легко получим величину искомого угла. ●

Если требуется вычислить острый угол между прямыми, не учитывая, какая прямая является первой, какая — второй, то правая часть формулы (10.12) берется по модулю, т. е. $\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Если прямые L_1 и L_2 параллельны, то $\varphi = 0$ и $\operatorname{tg}\varphi = 0$. Из формулы (10.12) следует $k_2 - k_1 = 0$, т. е. $k_2 = k_1$. И обратно, если прямые L_1 и L_2 таковы, что $k_1 = k_2$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, т. е. прямые параллельны. Следовательно, *условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:* $k_1 = k_2$.

Если прямые L_1 и L_2 перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 \cdot k_2}{k_2 - k_1} = 0$. Отсюда $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$ (или $k_2 = -\frac{1}{k_1}$). Справедливо и обратное утверждение. Таким образом, *условием перпендикулярности прямых является равенство* $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис. 47). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1; y_1)$ — произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\bar{n} = (A; B)$. Следовательно,

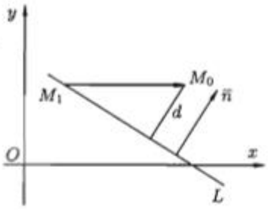

Рис. 47

$$d = |\text{пр}_{\bar{n}}\,\overline{M_1M_0}| = \left|\frac{\overline{M_1M_0} \cdot \bar{n}}{|\bar{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1; y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1 + By_1 + C = 0$, т. е. $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},} \qquad (10.13)$$

что и требовалось получить. ●

Пример 10.3. Найти расстояние от точки $M_0(2; -1)$ до прямой $3x + 4y - 22 = 0$.

Решение: По формуле (10.13) получаем

$$d = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{20}{5} = 4.$$ ●